ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

MẪN THỊ BẮC

ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG ĐỐI VỚI CÁC ÁNH XẠ NỬA TƯƠNG THÍCH VÀ ÁNH XẠ TƯƠNG THÍCH VỚI CÁC BIẾN THỂ CỦA NÓ TRONG KHÔNG GIAN METRIC NHÂN

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH

Mã số: 8.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: PGS.TS Phạm Hiến Bằng

THÁI NGUYÊN-2020

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Các tài liệu trong luận văn là trung thực. Các kết quả chính của luận văn chưa từng được công bố trong các luận văn Thạc sĩ của các tác giả khác.

Tôi xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện Luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong Luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Tác giả

Mẫn Thị Bắc

LỜI CẢM ƠN

Bản luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của PGS.TS Phạm Hiến Bằng. Nhân dịp này tôi xin cám ơn Thầy về sự hướng dẫn hiệu quả cùng những kinh nghiệm trong quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Xin chân thành cảm ơn Phòng Đào tạo- Bộ phận Sau Đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và hoàn thành luận văn.

Bản luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Cuối cùng xin cảm ơn gia đình và bạn bè đã động viên, khích lệ tôi trong thời gian học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Tháng 04 năm 2020

Tác giả

MỤC LỤC

LỜI CAM ĐOAN i

LỜI CẢM ƠN ii

MỤC LỤC iii

MỞ ĐẦU 1

1. Lý do chọn đề tài 1

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu 2

3. Phương pháp nghiên cứu 2

4. Bố cục luận văn 2

3

Chương 1. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Không gian metric nhân 3

1.2. Mối quan hệ và các tính chất của các ánh xạ tương thích và các biến thể của nó trong không gian metric nhân 9

Chương 2. ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG ĐỐI VỚI CÁC ÁNH XẠ NỬA TƯƠNG THÍCH VÀ ÁNH XẠ TƯƠNG THÍCH VỚI CÁC BIẾN THỂ CỦA NÓ TRONG KHÔNG GIAN METRIC NHÂN 20

2.1. Điểm bất động chung đối với các ánh xạ nửa tương thích trong không gian metric nhân 20

2.2. Điểm bất động đối với các ánh xạ tương thích và các biến thể của nó trong không gian metric nhân 24

KẾT LUẬN 38

TÀI LIỆU THAM KHẢO 39

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Như đã biết, tập các số thực dương $\mathbb{R}^+$ là không đầy đủ đối với metric thông thường. Để khắc phục vấn đề này, năm 2008, Bashirov [1] và các cộng sự đã đưa ra khái niệm không gian metric nhân. Năm 2012, Ozavsar [8] và Cevikel [8] đã đưa ra khái niệm về ánh xạ co nhân và chứng minh một vài định lý về điểm bất động của các ánh xạ đó trong không gian metric nhân. Năm 2015, Kang [6] và các cộng sự đã đưa ra khái niệm về các ánh xạ tương thích trong không gian metric nhân đồng thời đạt được một số kết quả về điểm bất động chung đối với các ánh xạ tương thích trong không gian metric nhân. Một hướng nghiên cứu gần như đồng thời với việc nghiên cứu đã nêu ở trên là việc xét điểm bất động đối với ánh xạ nửa tương thích, ánh xạ tương thích yếu, ánh xạ giao hoán và giao hoán yếu. Năm 1995, Y. J. Cho [2] và các cộng sự đã đưa ra khái niệm về ánh xạ nửa tương thích trong các không gian tôpô. Năm 1996, Jungck [5] đã đưa ra khái niệm về các ánh xạ tương thích yếu và đạt được kết quả về điểm bất động của ánh xạ tương thích yếu trong không gian metric. Năm 2013, Gu [3] và các cộng sự đã đưa ra định nghĩa về các ánh xạ giao hoán và giao hoán yếu trong một không gian metric nhân và chứng minh một vài định lý về các điểm bất động của những ánh xạ này. Năm 2016, P.Kumar, S. Kumar, S.M. Kang [7] đã đưa ra khái niệm ánh xạ nửa tương thích trong không gian metric nhân và thiết lập định lí điểm bất động chung đối với các ánh xạ đó. Theo hướng nghiên cứu này, chúng tôi chọn đề tài: "*Điểm bất động chung đối với các ánh xạ nửa tương thích và ánh xạ tương thích với các biến thể của nó trong không gian metric nhân* ".

Ý nghĩa thời sự: Đề tài có ý nghĩa thời sự, đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu.

2. Mục đích và nhiệm vụ nghiên cứu

Mục đích của luận văn là nghiên cứu và trình bày một số kết quả về không gian metric nhân và một số định lý về sự tồn tại điểm bất động chung đối với các ánh xạ nửa tương thích và điểm bất động chung đối với các ánh xạ tương thích với các biến thể của nó trong không gian metric nhân.

3. Phương pháp nghiên cứu

Sử dụng phương pháp của giải tích hàm.

4. Bố cục luận văn

Nội dung đề tài được viết chủ yếu dựa trên các tài liệu [6] và [7], gồm 39 trang, trong đó có phần mở đầu, hai chương nội dung, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: Trình bày một số khái niệm và tính chất cơ bản của không gian metric nhân.

Chương 2: Là nội dung chính của đề tài, trình bày một số kết quả về Điểm bất động chung đối với các ánh xạ nửa tương thích và ánh xạ tương thích với các biến thể của nó trong không gian metric nhân.

Cuối cùng là phần kết luận trình bày tóm tắt kết quả đạt được.

CHƯƠNG 1
CÁC KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Không gian metric nhân

Định nghĩa 1.1.1. Cho E là một tập khác rỗng. Một metric nhân là một ánh xạ $\rho : E \times E \to \mathbb{R}_+$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $\rho(u,v) \geq 1, \forall u,v \in E$ và $\rho(u,v) = 1 \Leftrightarrow u = v$;

(ii) $\rho(u,v) = \rho(v,u), \forall u,v \in E$;

(iii) $\rho(u,v) \leq \rho(u,w) \cdot \rho(w,v)$, $\forall u,v,w \in E$ (bất đẳng thức tam giác nhân).

Khi đó (E,ρ) được gọi là một không gian metric nhân.

Ví dụ 1.1.2. Cho $\mathbb{R}^n_+$ là tập hợp tất cả các bộ n số thực dương và hàm số $\rho^* : \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ được xác định bởi:

$$\rho^* \ u,v \ = \left|\frac{u_1}{v_1}\right|^* \cdot \left|\frac{u_2}{v_2}\right|^* \cdots \left|\frac{u_n}{v_n}\right|^*$$

ở đó $u = \ u_1,\cdots,u_n \ , v = \ v_1,\cdots,v_n \ \in \mathbb{R}^n_+$ và $|\,.\,|^*: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ xác định bởi

$$|\lambda|^* = \begin{cases} \lambda & khi \ \ \lambda \geq 1 \\ \dfrac{1}{\lambda} & khi \ \ \lambda < 1. \end{cases}$$

Khi đó, $\mathbb{R}^n_+, \rho^*$ là một không gian metric nhân.

Ví dụ 1.1.3. Cho $\rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [1,\infty$ thỏa mãn $\rho(u,v) = a^{|u-v|}$, với mọi $u,v \in \mathbb{R}$ và $a > 1$. Khi đó, ρ là một metric nhân và $(\mathbb{R},\rho)$ là một không gian metric nhân. Ta có thể gọi đó là không gian metric nhân thông thường.

Nhận xét 1.1.4. Chú ý rằng ví dụ 1.1.2 đúng với các số thực dương và ví dụ 1.1.3 đúng với mọi số thực.

Ví dụ 1.1.5. Cho (E,ρ) là một không gian metric. Cho ρ_a là ánh xạ xác định

trên E bởi

$$\rho_a(u,v) = a^{\rho\ u,v} = \begin{cases} 1 & khi \quad u = v, \\ a & khi \quad u \neq v, \end{cases}$$

ở đó $u, v \in E$ và $a > 1$. Khi đó, ρ_a là một metric nhân và E, ρ_a gọi là không gian metric nhân rời rạc.

Ví dụ 1.1.6. Cho $E = C^*[a,b]$ là tập tất cả các hàm liên tục nhân giá trị thực trên $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$. Khi đó, E, ρ là một không gian metric nhân với

$$\rho(x,y) = \sup_{t\in[a,b]} \left| \frac{x(t)}{y(t)} \right| \quad \text{với} \quad x, y \in E \text{ tùy ý.}$$

Nhận xét 1.1.7. Metric nhân và metric là độc lập với nhau.

Thật vậy, ánh xạ ρ^* được định nghĩa trong ví dụ 1.1.2 là một metric nhân mà không là metric vì nó không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác

$$\rho^*\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) + \rho^*\left(\frac{1}{2}, 3\right) = \frac{3}{2} + 6 = 7.5 < 9 = \rho^*\left(\frac{1}{3}, 3\right).$$

Mặt khác, metric thông thường trên $\mathbb{R}$ không là metric nhân bởi vì nó không thỏa mãn bất đẳng thức tam giác nhân

$$\rho\ 2,3\ \cdot \rho\ 3,6\ = 3 < 4 = \rho\ 2,6\ .$$

Định nghĩa 1.1.8. Cho (E, ρ) là một không gian metric nhân. Khi đó

(1) dãy $\{u_n\} \subset E$ gọi là hội tụ nhân tới u nếu với mỗi hình cầu mở nhân $B_\varepsilon(u) = \ v \mid \rho(u,v) < \varepsilon\ \ , \ \varepsilon > 1$, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $u_n \in B_\varepsilon(u)$ với mọi $n \geq N$ tức là $\rho(u_n, u) \to 1$ khi $n \to \infty$.

(2) dãy $\{u_n\} \subset E$ gọi là dãy Cauchy nhân nếu mọi $\varepsilon > 1$, tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $\rho(u_n, u_m) < \varepsilon$ với mọi $n, m \geq N$ tức là $\rho(u_n, u_m) \to 1$ khi $n, m \to \infty$.

(3) E gọi là không gian metric nhân đầy đủ nếu mọi dãy Cauchy nhân đều hội tụ nhân đến một phần tử thuộc E.

Chú ý 1.1.9. Tập các số thực dương $\mathbb{R}_+$ là không đầy đủ theo metric thông thường. Lấy $E = \mathbb{R}_+$ và dãy $u_n = \{1/n\}$. Hiển nhiên, u_n là một dãy Cauchy trong E với metric thông thường và E không là không gian metric đầy đủ do $0 \notin \mathbb{R}_+$. Trong trường hợp không gian metric nhân, ta lấy dãy $u_n = a^{1/n}$, ở đó $a > 1$. Khi đó, u_n là một dãy Cauchy nhân vì với $n \geq m$,

$$\rho\ u_n, u_m = \left|\frac{u_n}{u_m}\right| = \left|\frac{a^{1/n}}{a^{1/m}}\right| = \left|a^{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}\right| \leq a^{\frac{1}{m}-\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{m}} < \varepsilon$$

nếu $m > \dfrac{\log a}{\log \varepsilon}$, trong đó $|a| = \begin{cases} a & khi\ \ a \geq 1, \\ 1/a & khi\ \ a < 1. \end{cases}$

Ta có $u_n \to 1$ khi $n \to \infty$ và $1 \in \mathbb{R}_+$. Vậy E, ρ là một không gian metric nhân đầy đủ.

Năm 2012, Ozavsar và Cevikel [8] đã đưa ra khái niệm về các ánh xạ co nhân và đã chứng minh một vài định lý về điểm bất động của các ánh xạ đó trong một không gian metric nhân.

Định nghĩa 1.1.10. Cho f là ánh xạ từ một không gian metric nhân (E, ρ) vào chính nó. Khi đó, f được gọi là một phép co nhân nếu tồn tại một số thực $\lambda \in [0,1)$ sao cho

$$\rho(fu, fv) \leq \rho^{\lambda}(u, v) \text{ với mọi } u, v \in E.$$

Năm 2015, Kang và các cộng sự [6] đã đưa ra khái niệm về ánh xạ tương thích trong các không gian metric nhân như sau

Định nghĩa 1.1.11. Cho f và g là các ánh xạ từ không gian metric nhân (E, ρ) vào chính nó. Khi đó, f và g được gọi là tương thích nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \rho\ fgu_n, gfu_n = 1$, với mọi dãy $u_n \subset E$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} fu_n = \lim_{n\to\infty} gu_n = t \text{ với } t \in E \text{ nào đó.}$$

Định nghĩa 1.1.12. Cho f và g là các ánh xạ từ một không gian metric nhân (E,ρ) vào chính nó. Khi đó, f và g được gọi là tương thích yếu nếu chúng giao hoán tại những điểm trùng, tức là nếu $ft = gt$ với $t \in E$ thì $fgt = gft$.

Năm 1995, Cho và các cộng sự [2] đã đưa ra khái niệm về nửa tương thích trong các không gian topo như sau

Định nghĩa 1.1.13. [2] Cho f và g là các ánh xạ từ một không gian topo vào chính nó. Khi đó, f và g được gọi là nửa tương thích nếu

(1) $fv = gv$ kéo theo $fgv = gfv$ và

(2) $fu_n \to u$ và $gu_n \to u$ kéo theo $fgu_n \to gu$ khi $n \to \infty$.

Bây giờ, ta sẽ định nghĩa tính nửa tương thích theo điều kiện (2) chỉ trong phạm vi không gian metric nhân như sau:

Định nghĩa 1.1.14. Cho f và g là các ánh xạ từ một không gian metric nhân (E,ρ) vào chính nó. Khi đó, f và g được gọi là nửa tương thích nếu $\lim_{n\to\infty} \rho\ fgu_n, gu\ = 1$, với mọi dãy $\{u_n\} \subset E$ sao cho $\lim_{n\to\infty} fu_n = \lim_{n\to\infty} gu_n = u$ với u nào đó thuộc E.

Điều này suy ra rằng nếu f và g là nửa tương thích và $fv = gv$ thì $fgv = gfv$.

Chú ý rằng f và g là nửa tương thích không nhất thiết f và g là tương thích.

Hơn nữa, tính nửa tương thích của f và g không kéo theo tính nửa tương thích của g và f.

Ví dụ 1.1.15. Cho $E = [1,3]$ và $\rho : E \times E \to [1,\infty)$ được xác định bởi $\rho(u,v) = a^{|u-v|}$, trong đó $u,v \in E$ và $a > 1$. Khi đó, (E,ρ) là một không gian metric nhân. Lấy các ánh xạ $f,g : E \to E$ xác định bởi

$$fu = \begin{cases} u & khi\ \ 1 \le u < 2, \\ 3 & khi\ \ 2 \le u \le 3, \end{cases} \qquad gu = \begin{cases} 4-u & khi\ \ 1 \le u < 2, \\ 3 & khi\ \ 2 \le u \le 3, \end{cases}$$